

РЕЗЮМЕ

ГРАФЫ СТРУКТУРЫ И СТРУКТУРА ГРАФОВ

В работе рассматриваются проблемы распознавания таких свойств графов, как циклы, клики, орбиты и изоморфизм, а также исследуются проблем структурных изменений, восстанавливаемости, вероятности существования структур и др. на базе специального разработанного атрибута, «*текста структуры*», которое в данном контексте представляет структуру графа. ***Структура есть полный инвариант изоморфных графов.***

Графы рассматриваются с точки зрения структурности. Необходимость в этом возникла при конкретизации самого понятия структуры. При помощи графов можно объяснить понятие структуры и её изменения, упорядочить, определить и формализовать её атрибуты. Для выдвижения *значимости* структурных атрибутов, целесообразно применение элементов *семиотики*. Например, Г.Гермес [1938] видел в семиотике научную дисциплину, которая исследует даже основы математики.

Работа представляет собой обзор оригинальных результатов довольно длительного исследования таких категорий структурности и графов, как *знаки структуры, их классы, текст структуры, морфизмы, вероятность существования структуры, соседние структуры, сукцессии и системность структур, динамика структуры и др.* Структурную трактовку получили и некоторые традиционные проблемы теории графов, такие, как ***установление циклов, клик, орбит, изоморфизма и восстанавливаемости графов.*** Это достаточно для оправдания структурных исследований на графах. Все проблемы структуры графа образуют единую систему, и их решения сосредоточены вокруг её ядра – *текста структуры*, представляемой через *структурно-семиотическое распознавание графа.*

Иной взгляд на графы, по нашему мнению, просто необходим, так как традиционная теория графов все ещё находится, похоже, в тисках таких задач, как гамильтоновы циклы и описание электросетей, где в последнее время возникла тенденция считать проблемы орбит, изоморфизма и восстанавливаемости несуществующими, как, например, в работе "Modern Graph Theory" [Bollobás 1998].

Понятие структуры органически необходимо при рассмотрении системных объектов. В широком смысле, под структурой понимается относительно постоянная ***связь*** между элементами объекта. Поскольку общее понятие «связь» может быть истолковано произвольно, то понятия «структура» и «структурность» девальвировались до ширпотреба. Постараемся объяснить, что именно под этой «связью» подразумевается, каково ***значение*** структуры, имеет ли структура специфические ***признаки***, возможно ли её ***описать***, и т.д.

Существование структуры предполагает наличие определенных элементов и связей между ними. Говорят, что структура есть ***внутренняя форма организованности*** элементов системы, проявляющаяся в виде постоянных взаимных связей и единстве условий их определения. В случае произвольного объекта, его расчленение на части или *декомпонирование* является первым шагом к фиксации структуры. Возможен и противоположный подход. При исследовании некоего явления как целостности, *смонтировать* объект из необходимых элементов. Реальный объект является, как правило, в структурном смысле *многоаспектным*. Его можно разложить на элементы (компоненты, части), исходя из разных точек зрения. Разумеется, при условии, что сущность структурообразующих элементов и связей при каждом аспекте можно чётко определить. *Выбор аспекта* зависит от цели рассмотрения или изучения объекта. Когда цель установлена, вопрос о выборе аспекта не возникает.

Если элементы (компоненты, части) объекта и связи между ними зафиксированы, то мы имеем дело уже с определенной абстракцией объекта – *с системой*.

Схема, состоящая из элементов и связей, ещё не является структурой. Структура есть *абстракция системы*, в случае которой интересуются не столь эмпирическими свойствами элементов, сколь видами их организованности. Такое значение структуры подтверждается явлениями *алломорфности и аллотропии* в

физике и *изомерии* в химии. Примеров тому можно привести достаточно. Например, химически состав формулы C_2H_6O может быть организовано как в виде этиленового спирта, так и диметилового эфира.

Значение структуры и состоит в том, что эмпирические значения элементов заменены значениями объективных *структурных позиций*. Качество вещества зависит не только от его составных элементов, но и от способа их организованности, т.е. от структуры вещества. Это действует относительно большинства объектов совокупного типа (геологических, экологических, организационных и др.).

Целостная структура, отражающая свойства *симметрии* и *асимметрии*, есть *качественная абстракция* объекта. А некоторая совокупность чисел может оказаться *количественной абстракцией* реального объекта. *Структурность* есть универсальное свойство гетерогенных объектов быть внутренне организованными, т.е. иметь неизменяемую или изменяемую структуру. Как правило, структура природного объекта является изменяемой.

Утверждают, что *образом (отображением) структуры является граф G*. На самом деле, состав структуры и граф совпадают!

Графы, как правило, считаются геометрическими [Euler 1736, Алексеев и др. 1977], топологическими [Басакер, Саати 1974], комбинаторными [Харари 1969, Tutte 1998, Bollobás 1998], алгебраическими [Berge 1970, Зыков 1987, и др.], алгоритмированными [Christofides 1976, Емельчев и др. 1990, Thulasiraman и др. 1992, Gross и др. 1999] или конструктивными [Акимов 2001] объектами. В каждом из аспектов содержится некоторая оригинальная информация о графах. В данном случае нас интересует графы структуры, структура графов, её изменения и система графов в целом. В структурном аспекте мы отказались от терминов, подчеркивающих «угловатость» графов, таких как «вершина» и «ребро».

Граф есть полностью структурный объект, он *эксплицит* структуры. Действительно, «составные структуры», существующие между парами элементов, представляют собой определенные подграфы, классы позиции элементов представляют собой орбиты графа и т.д.

Структура, как форма организованности или связности, *распознается* при помощи *пересекающихся составных подграфов* графа G , фиксируемых между парами элементов $v_i v_j$. *Признаками* составного подграфа являются его *инварианты*, представляемые в виде кода.

Составной (под)граф g_{ij} графа G , образующийся из элементов $\{v\}$, принадлежащих к кратчайшим простым цепям, связывающим пару элементов v_i и v_j , куда в случае смежных элементов $v_i v_j$ входят и элементы *коллатеральных* кратчайших простых цепей (если они существуют), мы называем *бинар-графом* g_{ij} . Бинар-граф g_{ij} представляет *бинарное состояние* пар элементов $v_i v_j$.

Триаду инвариантов $\pm dnq_{ij}$ бинар-графа g_{ij} , где: $-d$ – расстояние между несмежными элементами v_i и v_j ; если элементы несвязные, то $-d=-0$; $+d$ – коллатеральное расстояние между смежными элементами $v_i v_j$; если коллатеральные цепи не существуют, то $+d=+1$; n – число элементов в графе связности g_{ij} ; q – число связей в графе связности g_{ij} , мы называем *бинар-знаком* w_{ij} , являющимся структурным признаком бинар-графа g_{ij} .

матрица W , элементами которой являются знаки связности w_{ij} , называется *матрицей знаков* графа G .

Бинар-знак w_{ij} характеризует свой бинар-граф g_{ij} довольно поверхностно, но в то же время, может достаточно хорошо характеризовать определенные структурные свойства.

Установление клик – одно из популярных задач традиционной теории графов. В практике разработаны различные, работающие, алгоритмы идентификации клик, один лучше другого. В структурном аспекте, наличие клика устанавливается лишь как знак определенного типа, из числа многих знаков структуры. Структурные знаки позволяют *измерять структуру*. Мерами M , $0 \leq M \leq 1$, структуры являются, например, *структурная компактность, связность, треуголярность, разветвленность, сотовидность* и др.

Существуют разные способы *совершенствования* бинарных знаков. *Позиционные классы* ΩV_k элементов и *бинарные классы* ΩR_n пар элементов совпадают с *орбитами* графа. Орбита представляет собой *область*

транзитивности автоморфизмов. Традиционная трактовка **автоморфизма** α графа – комбинаторная. По Харари [1969] автоморфизм рассматривается так же, как некоторый *изоморфизм графа в себе*. В структурном аспекте он принимает конкретную форму *изоморфизма бинарных графов* $g \cong g'$, где область транзитивности, или *орбита*, соответствует «области транзитивности изоморфизмов», или *классу изоморморфизмов* G .

Граф, связи («рёбра») которого соответствуют элементам *бинарной орбиты* ΩR_n графа G , называется **орбитным графом** G_n . Орбитные графы устанавливают внутреннюю структуру орбиты, где, например, одним из орбитных графов графа Фолкмана есть граф Петерсена.

Матрица знаков W ещё не является полным описанием структуры. Лексикографические правила упорядочивания и декомпонирования системы структурных знаков представляют собой *синтаксис* структуры, на основе которого составляется *текст* W^* , описывающий структуру. Текст структуры W^* есть средство для идентификации и представления структуры, позиционных классов его элементов и бинарных классов пар элементов, элементарных изменений, а также установления изоморфизма и измерения структуры.

Текст W^* структуры описывает структуру и её орбиты *с точностью до изоморфизма*, при котором: а) эквивалентность текстов $W_A^* \approx W_B^* \approx W_C^* \approx \dots$ означает изоморфизм графов $G_A \cong G_B \cong G_C \cong \dots$, эксплицирующих структуру; б) изоморфные графы $G_A \cong G_B \cong G_C \cong \dots$ отображают одну и ту же структуру GS ; в) число разных структур равняется числу неизоморфных графов.

Установление изоморфизма $G_A \cong G_B$ является существенной проблемой, для практического решения которой, теория графов не имеет единой точки зрения. Массовое увлечение изоморфизмом в семидесятых годах было оценено как «болезнь изоморфизма» [Gati 1979]. В структурном аспекте установление изоморфизма есть *проблема репрезентаций текста структуры*, где установление изоморфизма сводится к *сравнению текстов*, $W_A^* \approx W_B^*$.

Измерение структуры в атрибутах теории информации основывается на *внутреннем разнообразии структуры*, отраженном в тексте структуры W^* . Концепция разнообразия позволяет свести разные трактовки информации к общей основе. Структурное разнообразие в первую очередь выражается в разнообразии позиционных и бинарных классов (орбит). Его мера в абсолютных величинах представляет собой *объем информации*, а в относительных величинах – *асимметричность*. Разнообразие степеней определяет меру *топологической энтропии*. *Структурная сложность* зависит от мощности структуры и от числа орбит.

Элементарные изменения структуры графа G представляют собой операции со связями («рёбрами») графа: а) *удаление связи* $G \setminus e_{ij}$, что приводит к *максимальному подграфу* G^{sub} и б) *прибавление связи* $G \cup e_{ij}$, что приводит к *минимальному надграфу* G^{sup} . Элементарные изменения, в свою очередь, непосредственно связаны с бинарными орбитами ΩR и *соседними структурами* GS^{adj} , где: а) Максимальные подграфы G^{sub}_m , полученные в рамках одной и той же *бинарной (+)орбиты* ΩR^+_m , являются изоморфными, т.е. они образуют *класс изоморфизма* G_m , произвольный представитель которого, отображает *нижнюю соседнюю структуру* GS^{low}_m графа G ; б) Минимальные надграфы G^{sup}_m , полученные в рамках одной и той же *бинарной (-)орбиты* ΩR^-_m , являются изоморфными, т.е. они образуют *класс изоморфизма* G_m , произвольный представитель которого, отображает *верхнюю соседнюю структуру* GS^{upp}_m графа G .

операцию, *преобразующую* структуру GS в некоторую соседнюю структуру GS^{adj} , мы называем *морфизмом* F , $F: GS \rightarrow GS^{adj}$. Морфизм F является *рекурсивным*. В каждой соседней структуре существует «противоположная орбита» $\Omega R'$, а приложенный к ней морфизм F' *восстанавливает* первоначальную структуру, $F': GS^{adj} \rightarrow GS$.

классическая вероятность представляет собой однозначно определяемую относительную частоту проявления. Следовательно, отношение числа связей в орбите ΩR и числа связей в структуре, есть *вероятность случайного морфизма* PF .

По содержанию, **восстанавливаемость** означает возвращение к первоначальному состоянию. Проблема восстанавливаемости известна в традиционной теории графов под названием *гипотезы Улама*, и она считается едва ли не неразрешимой задачей. А тех, которые стремятся её целиком решить, считают чуть ли не чудаками. В структурном аспекте восстанавливаемость есть *проблема элементарных изменений структуры*. В гипотезе Улама, восстанавливаемость рассматривается на базе элементов, а в структурном аспекте – на базе связей. Со структурной точки зрения, восстанавливаемость структуры подразумевается сама собой. Если структура GS , **разложима (декомпозируема)** на свои нижние соседние структуры GS_m^{low} , $F_m: GS \rightarrow GS_m^{low}$, то она и **восстанавливаема (композируема)** к исходной структуре GS при каждой её нижней соседней структуре GS_m^{low} , $F_n: GS_m^{low} \rightarrow GS$. Такова закономерность элементарных изменений структуры. Задача восстанавливаемости реализуется в задачах установления текста структуры W , установления соседних структур GS^{adj} и установления изоморфизма (классов изоморфизма G). Даже, если графы G и H неизоморфны, но их соответствующие соседние графы оказываются изоморфными, то они **восстанавливаемы** при помощи морфизмов, приложенных к соответствующим орбитам соседних графов.

Сукцессия структур SF представляет собой последовательность соседних структур $F^1: GS_0 \rightarrow F^2: GS_1 \rightarrow F^3: GS_2 \rightarrow \dots \rightarrow F^t: GS_{t-1} \rightarrow GS_t$, где t её длина. Сукцессию, где величины некоторых структурных характеристик неизменны (или изменения чрезвычайно малы), мы рассматриваем как *стабильную сукцессию SFS*. Сукцессия SF может быть *случайной* или *неслучайной*. Вероятность случайной сукцессии PSF выражается как произведение вероятностей последовательных морфизмов. Множество сукцессий, *разветвляющихся* из общей начальной структуры GS_0 и *сходящихся* в общей конечной структуре GS_t , называется *семейством сукцессий*.

Каждой структуре GS , каждой орбите Ω_n соответствует морфизм F , который определяет соседнюю структуру GS^{adj} , $F: GS \rightarrow GS^{adj}$ и вероятность морфизма PF . Система, образуемая из всех $|V|$ -элементных структур (т.е. неизоморфных графов) $\{GS\}$ и морфизмов $\{F\}$ между ними, отображает *систему структурных изменений* $GSG^{|V|}$. Система $GSG^{|V|}$ необходима для изучения закономерностей структурных изменений, исходя из системного, вероятностного и динамического аспектов. Система $GSG^{|V|}$ также является семейством сукцессий.

С точки зрения неизменяемости некоторых структурных мер, семейство сукцессий может иногда оказываться *семейством стабильности SA*. Если некоторая совокупность стабильных структур не образует семейства, то она образует *область стабильности SD*.

Установление *вероятности существования PS* структуры исходит из обстоятельства, что при фиксированном числе $|V|$ элементов и фиксированном числе $|E|$ связей, *сумма вероятностей существования неизоморфных графов (т.е. структур GS) равна единице*. Матрица, чьи элементы являются вероятностями перехода P_{ij} и P_{ji} семейства сукцессии $GSG_{ij}^{|V|}$, представляет собой *стационарную цепь Маркова*.

Атрибуты системы структурных изменений $GSG^{|V|}$ являются сопоставимыми с атрибутами классической *динамической системы*, где: а) множество структур $\{GS^{|V|}\}$ соответствует множеству состояний динамической системы S ; б) множество шагов сукцессий $\{t\}$ – множеству упорядоченных моментов времени T ; в) множество морфизмов $\{F_n\}$ – множеству классов влияния F ; е) множество структурных характеристик – множеству выходных величин Y . В сопоставлении существуют *выходное отображение λ , целевая- μ и сукцессионная функция ϕ* . Динамика структуры может иметь прикладное значение.

Говорят, что структурность является неотъемлемым атрибутом всех реальных гетерогенных объектов. Важность учёта *феномена организованности* при изучении реальных систем подчёркивали уже Л. фон Берталанфи [1934] и Р.Розен [1985]. М.Веденов и В.Кремянский [1970] утверждают, что в именно *принцип структурности* будет иметь существенное познавательное и прикладное значение, так как он позволяет в концентрированном виде охватить большой объём информации по изучаемому объекту.

Суть представленной направлений состоит в попытке *разъяснения значения текста структуры* как принципиального момента для решения проблемы структуры.