

Siin on esitatud meetod, mis semiootilistest invariantidest moodustatud graafi kanoonilise esituse alusel võimaldab lahendada mõningaid klassikalisi probleeme mitte-klassikalisel viisil ning püstitada ja lahendada ka uusi.

GRAAFIDE STRUKTUURI SEMIOOTILINE „MÜSTEERIUM“ (Ülevaade)

John-Tagore Tevet

Sisukord

MÕNED SISSEJUHATAVAD SEISUKOHAD	1
1. SEMIOOTILISED ATRIBUUDID JA NENDE KASUTAMINE	2
2. SÜMMEETRIAPROBLEEM: VÕRDPOSITSIIONSUS EHK OEBIIDID	5
3. KANOONILISE ESITUSE JA ISOMORFISMI PROBLEEMID	6
4. NAABERSTRUKTUURID JA TAASTATAVUSE PROBLEEM	9
JÄRELSÕNA	14

MÕNED SISSEJUHATAVAD SEISUKOHAD

Struktuuri semiootika [1] on uurimisvaldkond *graafiteooria* ja *semiootika* piirimal mille uurimisobjektiks on graafi struktuur kui niisugune. See on heuristiliste meetodite süsteem struktuuri ja selle atribuutide uurimiseks. Struktuurisemiootiline lähenemine graafidele tekkis kunagi meelde jäänud süsteemiteoreetikute poolt välja öeldud arusaamast, et *graaf on struktuuri eksplikaat (st selgitaja)*.

Struktuur (ladina sõnast *structura* (sise)ehitus) on *filosoofiline kategooria*, mis on määratletud kui süsteemi elementide (muutumatu, püsiv) *seos* ja vahekord ehk *organiseerimisviis* [2]. Organiseeritus on kompleksne nähtus sidususest, kompositsioonist, regulaarsustest, hargnevusest, sümmeetriast jne. Teisest küljest on struktuur süsteemi abstraktsioon, „skelett“, kus selle elemendid ja nendevahelised seosed on minetanud oma empiirilised tähendused ja substraadiks on vaid nende organiseeritus. Struktuuri mõistele on omane eriline, samal ajal universaalne suhete (seoste) tüüp – *kompositsioon* – mis on avaldatav valemite, võrrandite, maatriksite, graafide jt vahendite abil. Struktuuri, kui terviku, elemendid sõltuvad struktuurist ja etendavad *kvalitatiivselt erinevat osa* olenevalt nende seostatuse viisist – *positsioonist* – struktuuris. Struktuur on moodustis omavahel seotud elementidest ning kujutatav *graafi* näol. Märgitakse, et struktuuri täpne definitsioon antakse *isomorfismi* mõiste abil. Struktuur on *isomorfsete graafide klassi kanooniline kuju*.

Semiootika on teadus *märkidest* ja *märgisüsteemidest*. Tegeleb *tähenduse, kommunikatsiooni- ja interpretatsiooni-protsesside ja -nähtuste* uurimisega. *Märk* semiootilises süsteemis on miski, mis reeglina tähistab midagi enam kui ta ise. Ch. Peirce järgi on märk seotud tunnetuse ja mõtlemisega. Märk on esitis objekti kohta, mis kajastab viimase *tähendust*. Struktuurisemiootika on üks paljudest objekt-orienteeritud semiootikatest. Struktuurseteks märkideks on *semiootilised invariandid*.

Strukturisemiootiline nägemus graafidest erineb mõneti tavapärasest sest esile kerkivad uued tõesed graafide kohta. Pole mitte midagi erilist, kui näha asja erinevatest vaatevinklitest. Struktuuri olulisemaid atribuute on *sümmeetria*. Sügavalt on sisse juurdunud arusaam sümmeetriast kui

mingist peegelduse nähtusest (**A**). Tegelikult on sümmeetria mõiste palju laiem. *Sümmeetria* (**B**) on struktuurne omadus, mis avaldub objekti ühetaoliste osade kordumises nii ruumis kui ajas [6]. Sümmeetria laiem mõiste (**B**) on *matemaatikas* defineeritud kui rühma $AutG$ automorfismide transitiivsus-piirkonna ehk *orbiidi* olemasolu graafis. Orbiit on sisuliselt *ekvivalentsusklass*, mille elemendid omavad struktuuris *võrdset positsiooni*. See positsioonide võrdsus ongi see, milles avaldub struktuuri *sümmeetria*. Struktuurisemiootilisest aspektist on struktuuri *taastatavus* selle sõna otseses tähenduses: struktuuri igal suurimal alamstruktuuril on teatav *taastav orbiit*, millele rakendatud operatsioon taastab lähtestruktuuri. Taastamine toimub nii suurimate alam- kui ka väikseimate ülemgraafe pidi.

NB! Propositsioonide, näidete ja viidete nummerdus vastab ingliskeelses põhitekstis esitatule.

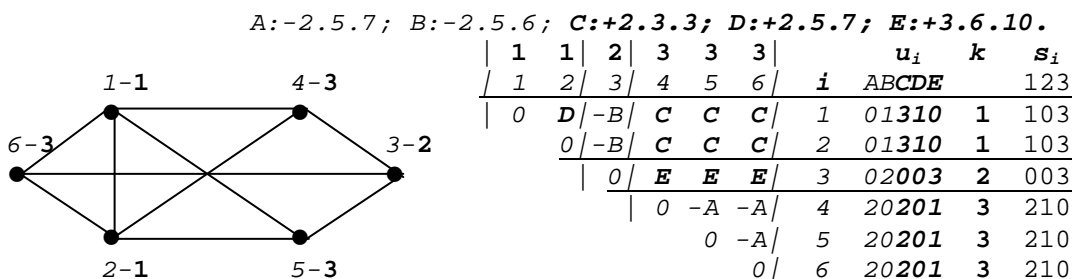
1. SEMIOOTILISED ATRIBUUDID JA NENDE KASUTAMINE

1.1. Semiootilised invariandid

Lähtume printsiibist, et struktuur on tuvastatav tema „elementaarosakeste“, st tipupaaride identifitseerimise teel. Selleks on loodud vastav *semiootiline identifitseerimisalgoritm*, mis identifitseerib iga tipupaari i, j vahelise „seose“ nende *ümbruste ühisosa* kujutava alamgraafi, nn *binaargraafi* g_{ij} põhjal.

Binaargraafi invariant $\pm d.n.q_{ij}$ on struktuuri *semiootiline invariant*, kus $-d$ tähendab tavakaugust mitte-naabertippude ja $+d$ kolateraalselt kaugust naabertippude v_i ja v_j vahel; n – tippude arvu ja q – servade arvu selles binaargraafis. Tipupaari identifitseerivat invarianti nimetame *binaarmärgiks*. Nende süsteem esitatakse *märgimaatriksi* W kujul. See kujutab endast graafi struktuuri *teksti*. Struktuur on uuritav just oma märgimaatriksi põhjal.

Näide 1.1. Graaf, selle binaarmärgid ja märgimaatriks W koos sagedus- ja klassivektoritega:



Kommentaari: Märgimaatriks on tuvastanud kolm tipu- ja viis tipupaari klassi, sh kolm serva ja kaks „mitteserva“ klassi ning graafi struktuuri tervikuna.

Binaarmärgid identifitseerivad graafi lühimaid teid, vöösid (girths), klikke, sildu jne (Prop. 1.1). Kuidas lugeda binaarmärke, missugused on nende *struktuursed tähendused*? Näiteks, binaarmärk $+dnq$, kus $d \geq 3$, identifitseerib *vöö* (girth) või nende *parve* pikkusega $d+1$ ning seda nimetame *vöömärgiks*. Jne.

1.2. (3.1.) Regulaarsused graafis

Struktuur võib omada mitmesuguseid tuntud ja vähetuntud *regulaarsusi* (Def. 1.2). Need on väljaloetavad märgimaatriksist W : 1) Graaf, mille tipud on võrdse valentsusega on (*valents*)-*regulaarne* graaf. 2) Graaf, mille mitte-naabertippude vahelised kaugused on võrdsed on *distant*-

regulaarne graaf. 3) Graaf, mille kõik $|V|$ tippu kuuluvad vöö(de)sse (*girth*) pikkusega $|V|-a$ on **vöö-** ehk **ring-regulaarne** graaf. 4) Graaf, mille kõik $|V|$ tippu kuuluvad (suurimasse) klikki võimsusega $|V|-b$ on **klikkregulaarne** graaf. 5) Valents-regulaarne graaf, mille iga naabertippude paar omab $a \geq 0$ ühist naabertippu ja iga mitte- naabertippude paar $b \geq 1$ ühist naabertippu on **tugevalt regulaarne** graaf.

Nii regulaarsus kui ka sümmeetria (**B**) kujutab endast „ühetaoliste“ elementide korduvust. Milles seisneb nende erinevus? Regulaarsuse „ühetaolisus“ kajastab nõ lokaalseid, tippude ja tipupaaride omadusi. Sümmeetria „ühetaolisus“ kajastab nõ globaalseid, struktuurist sõltuvaid omadusi. Tippude ja tipupaaride *võrdne positsioon*, st orbiit struktuuris on struktuurist sõltuv omadus. **b**) Loomulikult eeldab selline ühesugune positsioon ka mõningaid regulaarsusi, nagu valents-, distant-, vöö- või klikkregulaarsust, kuid mitte tingimata tugevregulaarsust.

1.3. (3.2.) Vöö- (ring-) ja klikk-regulaarsus

Kliki tuvastamine on olnud graafiteooria üks populaarsemaid ülesandeid. Ringi (*girth*) tuvastamine seda millegipärast ei ole. Kõikide klikituvastajate algoritmide ideoloogia on lähtunud „suurimasse klikki kuuluvate tippude eristamisest teistest“. Meetodeid selleks on välja töötatud hulgi. Paraku ei leidu klikifänne, kes oleks huvitatud klikkregulaarsusest. Näiteks (Ex. 1.2), bisümmeetriline ja tugevregulaarne Peterseni graaf on **5-vöö regulaarne**, selles on 12 vööd, kus iga tipp esineb 6 vöös ja iga serv esineb 4 vöös. Peterseni graafi täiendus **PETC** on 5 4-klikki, kus iga tipp esineb kahes klikis, iga serv esineb ühes klikis. See on **4-klikk-regulaarne**. Kui klikil on mingi tähendus ja see on leitav, siis see tavaliselt ka esitatakse. Klikkregulaarsuse puhul sellist huvi märgata ei ole, kuigi on tegemist kindlate reeglite järgi seotud klikkidega.

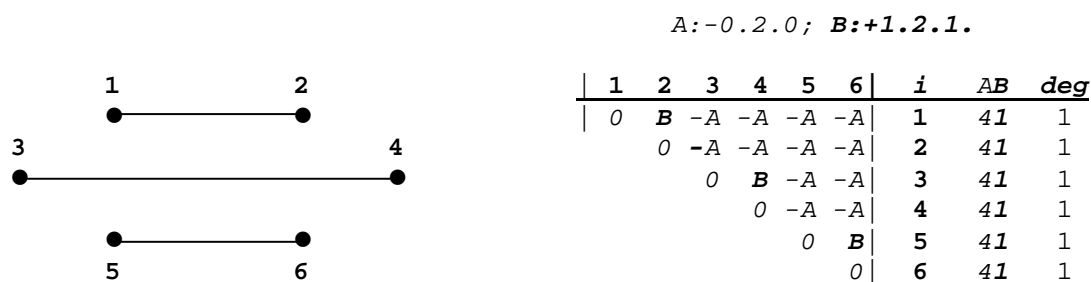
Suhetest **sümmeetria**, **vöö-** ja **klikk regulaarsuse** vahel (Prop. 1.2): **a**) Kõik tippudest sümmeetrilised („transitiivsed“) graafid on kas **vöö- või klikkregulaarsed** – ja vastupidi. **b**) Serva- ja bisümmeetrilise **vööregulaarse graafi täiendus on klikkregulaarne** (näiteks dodekaeder, Ex. 1.3). **c**) Polüsümmeetriline graaf võib üheaegselt olla nii vöö- kui ka klikkregulaarne.

Osaklikkidest (Prop. 1.3): **a**) Klikkregulaarse graafi osaklikid võivad olla kas **mittesidusad, sidusad** või **lõikuvad**. **b**) m -aluselise graafi täiendus on võrdsete aluste n puhul **n -klikkregulaarne**, mittelõikuvate n -klikkide arvuga m . Näiteks (Ex. 1.5), **kahealuselise** ja **5-vöö regulaarse** Heawood'i graafi täiendus on **7-klikk regulaarne** oma kahe sidusa klikiga.

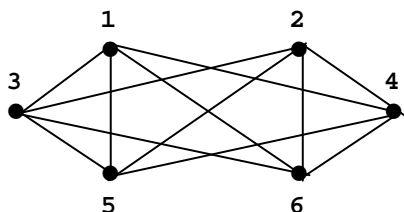
1.4 (3.3.) Bisümmeetria, klikk- ja tugev regulaarsus

Huvitav seos on bisümmeetria ja tugeva regulaarsuse vahel.

Näide 1.7. Graaf **B6-3** ja selle täiendus **B6-12** binaarmärkide, märgimaatriksi ja ühiste mõõtude näol:



$$A: -2.6.12; B: +2.4.5.$$



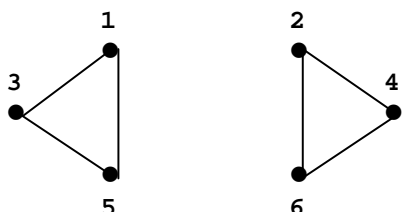
1	2	3	4	5	6	i	AB	deg
0	-A	B	B	B	B	1	14	4
	0	B	B	B	B	2	14	4
		0	-A	B	B	3	14	4
			0	B	B	4	14	4
				0	-A	5	14	4
					0	6	14	4

SRV	HR	SR	aut
$3^1 12^1$	0.2173	0.8152	48

Kommentaariid a) Graaf **B6-3** ja selle täiend **B6-12** on *bisümmeetrilised*. b) Graaf **B6-3** koosneb kolmest mittesidusast 2-klikist, see on *2-kliikk-regulaarne*. c) Täiend **B6-12** on *kolme-aluseline*, kus selle alused vastavad graafi **B6-3** 2-klikkidele. Tegemist on nn *alus-klikiga*, täpsemalt *2-tri-klikiga*, üldisemalt *n-m-klikiga*. Ei ole raske märgata, et kõik tipud kuuluvad *trianglisse*.

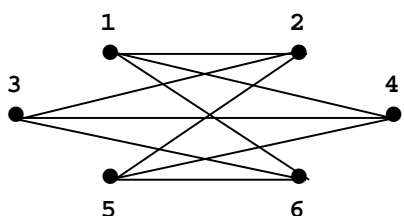
Näide 1.8. Graaf **B6-6** ja selle täiend **B6-9** binaarmärkide märgimaatriksi ja ühiste mõõtude näol:

$$A: -0.2.0; B: +2.3.3.$$



1	2	3	4	5	6	i	ABC	deg
0	-A	B	-A	B	-A	1	32	2
	0	-A	B	-A	B	2	32	2
		0	-A	B	-A	3	32	2
			0	-A	B	4	32	2
				0	-A	5	32	2
					0	6	32	2

$$A: -2.5.6; B: +3.6.9.$$



1	2	3	4	5	6	i	AB	deg
0	B	-A	B	-A	B	1	23	3
	0	B	-A	B	-A	2	23	3
		0	B	-A	B	3	23	3
			0	B	-A	4	23	3
				0	B	5	23	3
					0	6	23	3

SRV	HR	SR	aut
$6^1 9^1$	0.2923	0.7515	72

Kommentaariid a) Graaf **B6-6** ja selle täiend **B6-9** on *bisümmeetrilised*. b) Graaf **B6-6** koosneb kahest mittesidusast 3-klikist, see on *3-kliikk-regulaarne*. c) Täiendit **B6-9** iseloomustav binaargraaf 4-ring tunnusega $+3.6.9$ hõlmab graafi kõik $n=6$ tippu ja kõik $q=9$ serva, see on *täistunnus* ehk *täielik invariant*, st see binaartunnus iseloomustab ainult seda struktuuri. Täiend on *kahealuseline*, kus selle alused vastavad graafi **B6-6** 3-klikkidele ning see on *3-bi-klikk*. Ei ole raske märgata, et see on *4-vöö-regulaarne*, st kõik tipud kuuluvad 4-ringi.

Seostest *bisümmeetria* ja *osaklikkide* vahel (Prop. 1.4): a) Arv m omavahel *mittesidusast klikist* koosneva struktuuri *täiend* on *m-aluseline täisgraaf*, st on *m-klikk* – ja vastupidi. See tähendab, et kahest mittesidusast klikist koosneva struktuuri täiend on *bi-klikk*, kolmest mittesidusast klikist koosneva täiend on *tri-klikk* jne. b) Kõik võrdse võimsusega *n-m-klikid* ja nende täiendid *bisümmeetrilised*. Bisümmeetriline graaf võib olla kas *mittesidus* või *sidus*. c) *n-m-klikk* sisaldab (tava)klikki võimsusega m , see on *m-klikk-regulaarne*. Bi-klikk on *2-klikk-regulaarne*, tri-klikk on *3-klikk-regulaarne* jne. d) Bisümmeetriline *n-m-klikk* sisaldab $s=n^m$ (tava)klikki võimsusega m . e) Vastavalt aluste arvule nimetame *n-m-klikki* kas *bi-, tri-, kvadro-, kvinta-, seksta-, septa-, okta-*

nona-, deka-, või *undeka-* jne *-klikiks*. Näiteks, 1 kuni 20 tipuliste bisümmeetriliste graafide hulgas esineb kaks 6-tipulist *n-m-klikki* – *2-tri-klikk* ja *3-bi-klikk* kui mittesidusate, vastavalt 2- ja 3-klikkide täiendid. Kokku 27 *n-m-klikki*.

Tugevregulaarsusega seotud omadusi (Prop. 1.5): **a)** Kõik *sidusad bisümmeetrilised 2-distantid* reguleeritud struktuurid on tugevregulaarsed, kuid mitte vastupidi. **b)** Kõik *n-m-klikid* on tugevregulaarsed, kuid mitte vastupidi. **c)** Tugevregulaarse struktuuri *sidus täiend* on tugevregulaarne.

Peale lihtsalt konstrueeritavate *n-m-klikkide* on tuvastatud 12 bisümmeetrilist tugevregulaarset struktuuri. Seega Kuni 20-tipuliste graafide hulgas esineb $27+12=39$ sidusat *bisümmeetrilist + tugevregulaarset + klikkregulaarset* või *vööregulaarset* struktuuri (vt Example 1.9). Tavaliselt on *tugevregulaarseteks* peetud graafide nimekirjad puudulikud. Näiteks „kõige täielikumas“ nimekirjas [10] kus on esitatud 33 struktuuri, sh ka *n-m-klikke* kuid 6 struktuuri puuduvad. Samuti võime lihtsal viisil genereerida mõned bisümmeetrilised, klikk- ja tugevregulaarsed 999-tipulised struktuurid, mida teadaolevates nimekirjades tabada pole õnnestunud (Ex. 1.10). Struktuurisemiootiline lähenemine „avastab“ tugevregulaarikutele ja klikifännidele seni tundmatuid tugev- ja klikkregulaarseid struktuure.

2. SÜMMEETRIAPROBLEEM: VÖRDPOSITSIIONSUS EHK ORBIIDID

2.1. (1.2.) Orbiidid

Sümmeetriat käsitleme siin selle **B**-tähennduses, st kui elementide *võrdseid positsioone* struktuuris, mis avaldub võrdsete elementide eemaldamise teel saadud *jääkstruktuuri* näol (Prop. 2.1). Sümmeetria on struktuuri olulisemaid atribuute.

Struktuuri sümmeetria struktuurne tuvastamine toimub märgimaatriksis W orbiitide tuvastamise teel. Desorienteeriv termin *orbiit* on rühmateooria mõiste ja vajab siin selgitust. Struktuuri säilitavat tippude või tipupaaride substitutsiooni (permutatsiooni) nimetatakse *automorfismiks α* . See avaldub teatud *lokaalse isomorfismi* (*isomorfism iseendasse*) näol. Automorfismid moodustavad graafi automorfismirühma $AutG$. Permutatsioonitehnika võtetega fikseeritakse selles rühmas *automorfismide transitiivsuspiirkonnad ehk orbiidid Ω* , mille elemente peetakse „ühesugusteks“ ehk ekvivalentseteks. $AutG$ puhul huvitatakse peamiselt tipuorbiitidest. Kasulik on alustada tipupaari- ehk *binaarorbiitidest*.

Esitatakse olulisi *seosed automorfismide, lokaalisomorfismide, binaarorbiitide ja binaarmärkide vahel* (Prop. 2.2): *Automorfismide transitiivsuspiirkond* ehk *binaarorbiit ΩR_n* vastab *lokaalisomorfismide* ehk *jääkgraafide isomorfismiklassile Γ_n* , mis on asendatav *binaargraafide isomorfismiklassiga*. Binaarorbiidi ΩR_n elemendid on kindlaks määratavad vastavasse isomorfismiklassi Γ_n kuuluvate binaargraafide *binaarmärkide $\pm dnq$* ekvivalentsuse põhjal. Näites 1.1 esitatud tipu ja tipupaari klassid on sisuliselt tipu- ΩV_k ja binaarorbiidid ΩR_n . Nii rühmateoreetilisel kui ka struktuursel käsitlusel tuvastatud orbiidid *langevad kokku!* Erinevate struktuuridega graafid võivad omada üht ja sama rühma $AutG$, st ühesuguseid sümmeetriaomadusi, kuid omavad erinevaid märgimaatrikseid W .

2.2. Sümmeetria liigid ja mõõdetavus

Määratletud on järgmised struktuuri *sümmeetria liigid* (Prop. 2.4): **a)** Graaf, millel on ainult üks tipuorbiit ΩV_k on *tippudest sümmeetriline* ehk *transitiivne*, nagu seda graafiteoorias tihti

nimetatakse. **b)** Tippudest sümmeetriline graaf, millel on ainult üks binaar(+)orbiit ΩR_n^+ (st servaorbiit) ja ainult üks binaar(-)orbiit ΩR_n^- (st „mitteserva“ orbiit) on *bisümmeetriline* (näiteks Peterseni graaf). **c)** Tippudest sümmeetriline graaf, millel on üks binaar(+)orbiit ΩR_n^+ ja mitu binaar(-)orbiiti ΩR_n^- on *servadest sümmeetriline* ehk (+)sümmeetriline (näiteks Heawood'i graaf). **d)** Tippudest sümmeetrilist graafi, millel on mitu binaar(+)orbiiti ΩR_n^+ ja binaar(-)orbiiti ΩR_n^- nimetame *polüsümmeetriliseks* (näiteks, Franklini graaf). **e)** Graafi, mis ei ole tippudest sümmeetriline, st millel on rohkem kui üks tipuorbiit, kusjuures nendest vähemalt ühte orbiiti ΩV_k kuulub vähemalt kaks elementi (tippu) nimetame *ositi sümmeetriliseks*. **f)** Graaf, mille tipuorbiitide ΩV_k arv K võrdub tippude arvuga $|V|$ on *0-sümmeetriline* ehk (*täis*)*asümmeetriline*.

Sümmeetria on *mõõdetav* (Prop. 2.6, 2.7), selle *väärtus on 1*, kui esineb üksainus orbiit, selle *väärtus on 0*, kui orbiitide arv võrdub elementide arvuga. See loob võimaluse *võrrelda* selle väärtuse järgi erineva suurusega graafe. Näites 1.1 esitatud struktuuri sümmeetriaväärtused: *tipusümmeetria* $SV=0,478$, *binaarsümmeetria* $SR=0,462$ ja *servasümmeetria* $SE=0,610$.

2.3. (1.3.) Orbiitstruktuurid

Kuid kuidas saab orbiite struktuuris kujutada? Väga lihtsalt. Binaarorbiit ΩR_n on struktuuri GS , kui tipupaaride kompleksi osa, st koosneb samuti tipupaaridest ning on samuti graafina kujutatav. *Orbiitstruktuur* on struktuur mille servad vastavad üht orbiiti esitavale binaarmärgile ja ainult sellele (Prop. 2.8). Serva ehk binaar(+)orbiidile vastav struktuur on struktuuri osastruktuur ning „mitteserva“ ehk binaar(-)orbiidile vastav on täiendi osastruktuur.

Probleem seisneb graafi *dekomponeerimises selle orbiitstruktuurideks*. Orbiitgraafid *avavad lähtegraafi struktuuri* erinevatest aspektidest ja *esitavad selle varjatud omadusi* (Prop. 2.9). Kui graaf on aluseline või sisaldab komponente, klikke, ringe jt, siis kerkivad neid osiseid kujutavad tipukogumid orbiitgraafides mingil teisel kujul esile. Graafi erinevad orbiitgraafid või erinevate graafide orbiitgraafid võivad osutada *isomorfseteks* või *langeda kokku*. Näiteks, Folkmani graafi üheks orbiitgraafiks on Peterseni graaf.

3. KANOONILISE ESITUSE JA ISOMORFISMI PROBLEEM

3.1. (2.2.) Graafide kanooniline esitus

Graafide *kanooniline esitus* tähendab graafi esitamist mingil selle struktuuri esitaval kujul, soovitatavalt *isomorfismi täpsusega*. Kanoonilise esituse probleemi püstitas arvatavasti Lazlo Babai [11, 12] 1977. aastal. Kanoonilist esitust kujutavad endast näiteks *3-kuup-koodid* [13]. Paraku ei sisalda need peaaegu mingit teavet struktuuri kohta.

Hoopis sügavamale on võimalik tungida struktuuri semiootiliste invariantide abil. Dekomponeeritud märgimaatriks W on graafi struktuuri kanooniline esitus *binaarmärkide, sümmeetriaomaduste (orbiitide) ja isomorfismi täpsusega*. Struktuuri tuvastamine on midagi rohkemat kui isomorfismi tuvastamine.

Näiteks (Näide 3.1), ositi sümmeetrilise ja tugevregulaarse graafi WEI kanooniline esitus on saadud vaid *kuue binaarmärgi baasil*, mille alusel on 25×25 märgimaatriks *dekomponeeritud 15 tipuorbiidiks, 115 osamaatriksiks* $W_{ki,kj}$, *74 binaar(-)orbiidiks ja 80 binaar(+)-orbiidiks*.

3.2. (2.3.) Struktuuri süvaidentifitseerimine

Suurte, tippudest sümmeetriliste graafide puhul võivad binaarmärgid $\pm d.n.q.ij$ osutada mitte piisavaiks selleks, et korrektselt eristada binaarorbiite \mathcal{OR}_n . Selleks kasutame *süvaidentifitseerimise meetodeid* (Prop. 3.1): 1) *Kõrgemat järku m binaargraafide g_{ij}^m kasutamine* (P3.1.1), kus *täiendavaks identifikaatoriks* on kõrgemat järku binaargraafi g_{ij}^m binaarmärk dnq_{ij}^m . Sellist süvaidentifitseerimist nimetame *kõrg-identifitseerimiseks*. 2) *Lokaalse märgimaatriksi W_{ij} kasutamine* esimest või kõrgemat järku binaargraafi puhul (P3.1.2), kus *täiendav identifitseerimine* toimub lokaalsete märgimaatriksi W_{ij} baasil. Sellist süvaidentifitseerimist nimetame *lokaal-identifitseerimiseks*. 3) *Seosmaatriksi korrutise $E \times E \times E \times \dots = E^n$ kasutamine*, mille elemendid e^n_{ij} identifitseerivad tippude vahelisi *pikimaid lihtahelaid* (P3.1.3). Sellist süvaidentifitseerimist nimetame *korrutis-identifitseerimiseks*. See ei tähenda, et süvaidentifitseerimine alati midagi täpsustab. Näiteks, Peterseni, Heawood'i, Coxeter'i jt tuntud graafide süvaidentifitseerimine on mõttetu.

Süvaidentifitseerimise teel täpsustatud binaarmärki, näiteks $\pm d.n.q.e^n_{ij}$, nimetame *süvamärgiks* ja vastavat maatriksit *süvamärgi maatriksiks W^**

Näide 3.2. (fragment). Polüsümmeetriliste graafide PRA_A ja PRA_B ühised binaarmärgid ja *korrutis-identifitseerimise* tulemused:

$$A: -3.8.10; B: -3.6.7; C: -2.4.4; D: -2.3.2; \underline{E: +2.4.6}; F: +3.8.16.$$

PRA_A seosmaatriksastme E^5 baasil saadud täpsustavad binaarmärgid e_{ij}^5 ja sagedusvektor: u_i

Ühised binaarmärgid	0	-A	-B	-C		-D	E		F
Täpsustavad binaarmärgid e^5	180	125	110	165	160	80	231	233	210
Süvamärgi tähistus	0	-A	-B	-C1	-C2	-D	E1	E2	F

$$\frac{ABCCDEEF \quad Orb}{24422212 \quad 1}$$

PRA_B seosmaatriksastme E^7 baasil saadud täpsustavad binaarmärgid e_{ij}^7 ja sagedusvektor u_i :

Ühised	0	-A	-B		-C			-D	E		F
Täpsustav e^7	4410	3437	3276	3277	4081	4088	4011	3010	4831	4803	4445
Süvamärk	0	-A	-B1	-B2	-C1	-C2	-C3	-D	E1	E2	F

$$\frac{ABBCCDEEF \quad Orb}{222222212 \quad 1}$$

Seega, graafid PRA_A ja PRA_B *ei ole isomorfsed*. Graaf PRA_A erineb graafist PRA_B binaar(-)orbiitide arvu poolest, kuid langeb kokku binaar(+)sümmeetriliste omadustega. Nende täiendi puhul on see vastupidi.

Mõnede bisümmeetriliste ja tugevregulaarsete graafide puhul on kasutatav *lokaal-identifitseerimise* meetod (Prop.3.3 ja Ex. 3.5).

3.3. (2.1.) Graafide isomorfismi probleem

Graafide isomorfismi probleem võis kerkida ülesse aastal 1857, kui A. Cayley [16] tegeles orgaaniliste isomeeride alaste uuringutega. Kaht graafi nimetatakse isomorfseks, kui nad erinevad vaid oma tippude märgistatuse poolest. Graafi G_A isomorfne kujutus graafi G_B on isomorfne

substitutsioon $\varphi: V_A \rightarrow V_B$. Isomorfismi tuvastamine seisneb vaid *vastuses küsimusele*: kas G_A on isomorfne graafiga G_B ? Kui see on nii, siis tuleb esitada isomorfne substitutsioon. Nii on see klassikalikult sõnastatud. **Isomorfismi probleem** tähendab isomorfismi tuvastamise algoritmi moodustamist. Struktuurset aspektist peame graafe G_A ja G_B isomorfseteks parajast siis kui nende struktuurid on ekvivalentsed.

Struktuuride ekvivalentsus $GS_A \cong GS_B$ (Prop. 3.5) kujutab endast isomorfismi $G_A \cong G_B$ komponentide, aluste, tipuorbiitide $(\Omega V_k)_A \cong (\Omega V_k)_B$, binaarorbiitide $(\Omega R_n)_A \cong (\Omega R_n)_B$, orbiitgraafide $G_n)_A \cong (G_n)_B$, binaargraafide $(g_{ij})_A \cong (g_{ij})_B$, jne tasemel. Struktuuride ekvivalentsus ei nõua isomorfismituvastust tipu substitutsioonide tasemel.

Näide 3.8. Graafide G_A ja G_B binaarmärgid ja dekomponeeritud märgimaatriksid W_A ja W_B :

$$A: -2.5.7; \quad B: +2.3.3; \quad C: +2.4.6; \quad D: +2.5.8; \quad E: +3.6.11.$$

1	1	1	1	2	2	u_i	s_i	k	1	1	1	1	2	2	u_i	s_i	k			
1	2	3	4	5	6	i	ABCDE	12	.	1	3	4	6	2	5	i	ABCDE	12	.	
0	D	C	C	-A	B	1	11210	31	1	0	C	D	C	B	-A	1	11210	31	1	
	0	C	C	-A	B	2	11210	31	1		0	C	D	-A	B	3	11210	31	1	
		0	D	B	-A	3	11210	31	1	\approx		0	C	B	-A	4	11210	31	1	
			0	B	-A	4	11210	31	1			0	-A	B	6	11210	31	1		
				0	E	5	22001	21	2				0	E	2	22001	21	2		
					0	6	22001	21	2					0	5	22001	21	2		

Struktuurse ekvivalentsuse põhimõte: a) Graafide G_A ja G_B märgimaatriksid on *struktuurselt ekvivalentsed* $W_A \approx W_B$, millest järeldub, et struktuurid GS_A ja GS_B on *ekvivalentsed* $GS_A \cong GS_B$ ehk *graafid on isomorfsed* $G_A \cong G_B$. b) Märgimaatriksite struktuurne ekvivalentsus $W_A \approx W_B$ on osamaatriksite $(W_{kk'})_A \leftrightarrow (W_{kk'})_B$, neis sisalduvate binaarorbiitide $(\Omega R_n)_A \leftrightarrow (\Omega R_n)_B$ ja neid iseloomustavate binaarmärkide $dnq_A \leftrightarrow dnq_B$ üksühene vastavus. c) Struktuuride GS_A ja GS_B ekvivalentsuse tuvastamiseks piisab binaarmärkide $\{dnq\}_A \cong \{dnq\}_B$, sagedusvektorite $\{u_i\}_A \cong \{u_i\}_B$ ja klassivektorite $\{s_i\}_A \cong \{s_i\}_B$ ekvivalentsuse kindlaksmääramisest.

3.4. (2.4.) Isomorfismituvastuse algoritmi kanoonilised väljundid

Isomorfismituvastuse algoritmide puhul piirduakse tavaliselt vaid „isomorfismi“ või „mitte-isomorfismi“ fikseerimisega. Orbiitide tuvastamine ei kuulu isomorfismiprobleemi. Isomorfismituvastuse polünomiaalsega lahendusega on hakkama saanud serrlased Ashay Dharwadker jt [8] ja Blazej Podsiadlo [33]. Need mõlemad omavad *kanoonilisi väljundeid*.

Ashay Dharwadker jt isomorfismituvastuse *polünomiaalne algoritm* (Ex. 3.9) rajaneb mittetäielike märgimaatriksite W_A ja W_B formeerimisel, kus iga sagedusvektorite baasil eristatud tipuklassi V_{Ak} ja V_{Bk} raames toimub nende maatriksite ridade i ja veergude j ümberjärjestamine *substitutsioonide tasemel* isomorfismi tuvastamise eesmärgil. Algoritmi isomorfismituvastus kui ka polünomiaalsus on üksikasjalikult tõestatud. Algoritmi käsitlemine ja tulemuste kanooniline esitamine on eeskujulikult disainitud.

Blazej Podsiadlo isomorfismituvastuse algoritmi (Ex. 3.10) väljundiks on teatud *suurimad väärtused* <the biggest value>, mida ka graafi kanooniliseks esitiseks pidada võib. Nende välimus on vastuvõetavam, kui hästituntud 3-kuup-koodidel. Peale selle esitatakse ka hulk iseloomustavaid parameetreid nagu *teede arv* <paths>, *automorfismide arv* <automorphisms>, *lahendamiseks kulutatud aeg* <treal>. Need suurimad väärtused kujutavad endast arvjadasi, mille algusosad

võivad „sarnaste“ graafide korral kokku langeda. See võimaldab „sarnasust“ või isomorfismi teatud mõttes mõõta.

4. NAABERSTRUKTUURID JA TAASTATAVUSE PROBLEEM

4.1. (4.2.) Seosed isomorfsete graafide ja nende $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide vahel

Siin on sobiv alustada A Titovi [35] poolt 1975 aastal tõestatud teoreemiga: „Kui graafi G kõik $(G \setminus v_i)$ -alamgraafid on isomorfsed, siis on automorfismi rühm $AutG$ transitiivne tippude hulgal V “. See tähendab, et graaf G on *tippudest sümmeetriline* („transitiivne“), st *esineb ainult üks tipuorbiit* $\Omega V_{k=1=K}$ millele vastab parajasti üks $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide isomorfismiklass $\Gamma_{k=1=K}$.

Sellega oleme tagasi jõudnud *võrdpositsioonide* ja *jääkgraafide* (Prop. 2.1) ning *automorfismide*, *lokaal isomorfismide*, *orbiitide* ja *semiootiliste invariantide* (Prop. 2.2) vaheliste seoste juurde. Tõepoolest, tipuorbiit $\Omega V_{k=1=K} = \Omega(v_{i=1}, \dots, v_{i=|V|})_{k=1=K}$ on rühma $AutG$ automorfismide transitiivsuspiirkond, mis vastab graafi $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide isomorfismiklassile $\Gamma_{k=1=K}$ ning kujutab tippude *ekvivalentsusklassi*, mis on esitatud dekomponeeritud märgimaatriksi W osamaatriksis W_k .

Tipuorbiidi ΩV ja $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide vahel kehtib järgmine seos (Prop. 4.1): „Igale tipuorbiidile $\Omega V_k = \Omega(v_{i1}, \dots, v_{iq})_k$, $k \in [1, K]$, vastab isomorfismiklass $\Gamma_k = \{(G \setminus v_i)_I \cong \dots \cong (G \setminus v_i)_q\}_k$ “ (vt Ex. 4.3 ja 4.4). Võime öelda, et tipuorbiidile ΩV_k kui ekvivalentsusklassile Γ_k vastab teatud $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide „isomorfismiklikk“, st kõik $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide paarid on omavahel isomorfsed.

Teame, et kui märgimaatriksid W_A ja W_B on semiootiliselt ekvivalentsed, siis on vastavad graafid G_A ja G_B *isomorfsed*, $G_A \cong G_B$. Teame ka, et igale tipuorbiidile ΩV_k , $k \in [1, K]$, vastab parajasti üks $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide *isomorfismiklass* Γ_k .

Vastavalt Prop. 3.5 kaasneb graafide G_A ja G_B isomorfsusega ka *tipuorbiitide isomorfism*, $(\Omega V_k)_A \cong (\Omega V_k)_B$, $k \in [1, K]$.

Orbiitide isomorfsusest ja Prop. 4.1 järeldub (Prop. 4.2): „Isomorfsete graafide G_A ja G_B tipuorbiitide isomorfismiga $(\Omega V_k)_A \cong (\Omega V_k)_B$, $k \in [1, K]$, kaasneb nendele orbiitidele vastavate $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide *isomorfismiklasside isomorfism*, $(\Gamma_k)_A \cong (\Gamma_k)_B$, $k \in [1, K]$, kus $(G \setminus v_i)_A \subset (\Gamma_k)_A$ ja $(G \setminus v_i)_B \subset (\Gamma_k)_B$ “. Isomorfsete graafide tipuorbiitide isomorfismiga $(\Omega V_k)_A \cong (\Omega V_k)_B$, kaasneva $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide *isomorfismiklasside isomorfism* $(\Gamma_k)_A \cong (\Gamma_k)_B$ kujutab endast sisuliselt isomorfismiklasside ühendit $(\Gamma_k)_A \cup (\Gamma_k)_B$, kus peale *klassisest isomorfismide* esinevad ka *klassidevahelised isomorfismid* $(G \setminus v_i)_A \cong (G \setminus v_i)_B$.

4.2. (4.3.) Naaberstruktuurid: graafi suurimad alam- ja väikseimad ülemstruktuurid

Elementaarsed operatsioone servadega: 1) Graafi *serva eemaldamisel* $G \setminus e_{ij}$ saame graafi G *suurima alamgraafi* G^{sub} ; 2) Graafile *serva lisamisel* $G \cup e_{ij}$ saame graafi G *väikseima ülemgraafi* G^{sup} . Suurimaid alamgraafe G^{sub} ja väiksemaid ülemgraafe G^{sup} nimetame graafi G *naabergraafideks* G^{adj} (Def. 4.1).

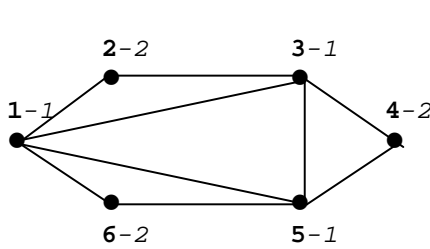
Kehtib järgmine seaduspära (Prop. 4.3): „Kui graafi G binaarorbiidile $\Omega R_n = \Omega(r_{ij1}, \dots, r_{ijq})_n$ rakendada serva-operatsioonid f on disjunktiivselt $\{(f_{ij})_1 \vee \dots \vee (f_{ij})_q\}_n$, siis moodustavad saadud disjunktiivsed naabergraafid *isomorfismiklassi* $\Gamma_n = \{(G^{adj}_n)_I \cong \dots \cong (G^{adj}_n)_q\}$. Isomorfismiklassi Γ_n kõik graafid G^{adj} omavad üht ja sama struktuuri GS ning kujutavad endast graafi G *naaberstruktuuri* GS^{adj} , mis on esitatav samuti *märgimaatriksite* W^{adj} kujul.

Serva-operatsioon, mis disjunktiivselt muudab struktuuri GS selle naaberstruktuuriks GS^{adj} nimetagem *morfismiks* $F, F: GS \rightarrow GS^{adj}$ (Def. 4.2).

Seega, esineb morfism $F_{n-}: GS \rightarrow GS^{sup}_{n-}$, mis indutseerib GS binaar(-)orbiidi ΩR_{n-} baasil GS naaber-ülemstruktuuri GS^{sup}_{n-} ja morfism $F_{n+}: GS \rightarrow GS^{sub}_{n+}$ mis indutseerib GS binaar(+)orbiidi ΩR_{n+} baasil GS naaber-alamstruktuuri GS^{sub}_{n+} .

Näide 4.7. Graaf-struktuur $GS.37(6.9.4)$ [41] (Graafiatlase [36] G163) ja selle naaber-ülem ja naaber-alam struktuurid:

A:-2.4.5; B:-2.3.2; C:+2.3.3; D:+2.4.5.



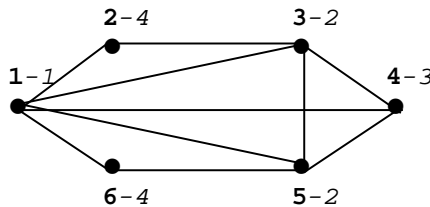
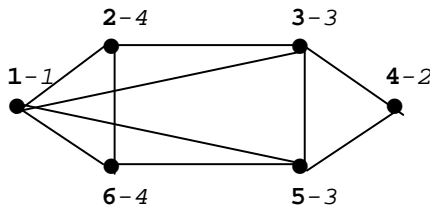
1 1 1 2 2 2			k
1 3 5 2 4 6	i	ABCD	12
0 D D C -A C	1	1022	1 22
0 D C C -A	3	1022	1 22
0 -A C C	5	1022	1 22
0 -B -B	2	1220	2 20
0 -B	4	1220	2 20
0	6	1220	2 20

Naaberstruktuuride ja morfismide F_n (üleminekute) karakteristikud:

	GS^{adj}_n	1	2
$GS.37$	GS^{sup}_{n-}	29	30
	$k.k'(p)$	2.2 (-B)	1.2 (-A)
	PF^{sup}_{n-}	3/6	3/6
$GS.37$	GS^{sub}_{n+}	72	76
	$k.k'(p)$	1.1 (+D)	1.2 (+C)
	PF^{sub}_{n+}	3/9	6/9

GS^{sup}_{n-} ja GS^{sub}_{n+} on naaberstruktuuride järjekorranumbrid 6-tipuliste graafide süsteemis; k, k' – binaarorbiiti sisaldava osamaatriksi $W_{k,k'}$ indeks, kus (p) täpsustab binaarorbiidi selles; PF_n – binaarorbiidi osakaal ehk *esinemise tõenäosus*.

Graafi $GS.37(6.9.4)$ naaber ülemstruktuurid binaarorbiidi $-B$ järgi, $GS^{sup}_{n=-B}$, ($GS.29(6.10.11)$, Graafiatlase G184) ja binaarorbiidi $-A$ järgi, $GS^{sup}_{n=-A}$, ($GS.30(6.10.12)$, Graafiatlase G180) ja nende maatriksid W^* :



A:-2.5.8; B:-2.4.5; C:-2.3.2;
D:+2.3.3; E:+2.4.5.

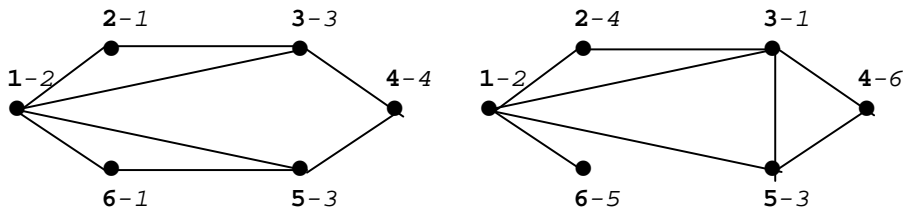
A:-2.4.5; B:-2.3.2;
C:+2.3.3; D:+2.4.6; E:+2.5.8.

1/ 2/ 3 3/ 4 4			k
1 4 3 5 2 6	i	ABCDE	1234
0 -B E E E E	1	01004	1 0022
0 D D -C -C	4	01220	2 0020
0 E D -A	3	10022	3 1111
0 -A D	5	10022	3 1111
0 D	2	10121	4 1011
0	6	10121	4 1011

1/ 2 2/ 3/ 4 4			k
1 3 5 4 2 6	i	ABCDE	1234
0 E E E D C C	1	00212	1 0212
0 D D C -A	3	10121	2 1111
0 D -A C	5	10121	2 1111
0 -A -A	4	20030	3 1200
0 -B	2	21200	4 1100
0	6	21200	4 1100

Kommentaariid: Kõik lähtegraafi binaarorbiidile $-B$ vastavad naaber-ülemgraafid, $G^{sup}_{n=-B}$, on *isomorfsed* ja kõik binaarorbiidile $-A$ vastavad naaber-ülemgraafid, $G^{sup}_{n=-A}$, on *isomorfsed*.

Graafi *GS.37(6.9.4)* naaber alamstruktuurid binaarorbiidi $+D$ järgi, $GS^{sup}_{n=+D}$, (*GS.72 (6.8.18)*, Graafiatlase G148) ja binaarorbiidi $+C$ järgi, $GS^{sup}_{n=+C}$, (*GS.76 (6.8.22)*, Graafiatlase G137) ja nende maatriksid W^* :



$A: -2.4.4; B: -2.3.2;$
 $C: +2.3.3; D: +3.4.4.$

$A: -3.5.6; B: -2.4.5; C: -2.3.2;$
 $D: +1.2.1; E: +2.3.3; F: +2.4.5.$

1	2	3	4	k				
2	6	1	3	5	4	i	ABCD	1234
0	-B	C	C	-B	-B	2	0320	1 0110
0	C	-B	C	-B	6	0320	1 0110	
0	C	C	-A	1	1040	2	2020	
0	-A	D	3	1121	3	1101		
0	D	5	1121	3	1101			
0	4	1202	4	0020				

1	2	3	4	5	6	k			
3	1	5	2	6	4	i	ABCDEF	123456	
0	F	F	E	-C	E	3	001022	1 011101	
0	E	E	D	-B	1	010121	2 101110		
0	-B	-C	E	5	011021	3 110001			
0	-C	-C	2	012020	4 110000				
0	-A	6	103100	5 010000					
0	4	111020	6 101000						

Kommentaariid: Kõik lähtegraafi binaarorbiidile $+D$ vastavad naaber-alam-graafid, $G^{sup}_{n=+D}$, on *isomorfsed* ja kõik binaarorbiidile $+C$ vastavad naaber-alam-graafid, $G^{sup}_{n=+C}$, on *isomorfsed*.

Eksisteerigu graafiga G_A isomorfne graaf G_B . Siis esineb iga binaarorbiitide paari $(\mathcal{OR}_n)_A$ ja $(\mathcal{OR}_n)_B$ raames, $n \in [1, M]$, vastavate naabergraafide isomorfismiklasside isomorfism $(\Gamma_n)_A \cong (\Gamma_n)_B$, st isomorfismide $(G^{adj}_n)_A \cong (G^{adj}_n)_B$ klass. Meie juba t e a m e, et isomorfsetel graafidel $G_A \cong G_B \cong G_C \cong \dots$ on isomorfsed naabergraafid $(G^{adj}_n)_A \cong (G^{adj}_n)_B \cong (G^{adj}_n)_C \cong \dots$.

Nüüd võime esitada ehedalt järgmise propositsiooni:

Propositsioon 4.4. Kui morfismid $F_n: GS \rightarrow GS^{adj}_n$ on disjunktiivselt $F_1 \vee \dots \vee F_n \vee \dots \vee F_N$ rakendatud GS binaarorbiitidele $\mathcal{OR}_1, \dots, \mathcal{OR}_n, \dots, \mathcal{OR}_N$, siis me ütleme et struktuur GS on *dekonstrueeritud selle naaberstruktuurideks* $GS^{adj}_1, \dots, GS^{adj}_n, \dots, GS^{adj}_N$.

Mitte-dekonstrueeritavaid struktuure ei esine. Meie juba t e a m e, et naaberstruktuur GS^{adj}_n tähendab *isomorfismiklassi* Γ^{adj}_n , mis võib sisaldada isomorfseid naabergraafe $(G^{adj}_n)_1 \cong (G^{adj}_n)_2 \cong (G^{adj}_n)_3 \cong \dots \subseteq GS^{adj}_n \cong \Gamma^{adj}_n$.

4.3. (4.1.) Ulami hüpoteesist

Taastatavuse ehk rekonstruktsiooni probleem on tuntud peamiselt *Ulami hüpoteesina* [7]. Ulami tõdemuse alusel kujutab rekonstrueerimine isomorfismi suhteid kahe graafi ja nende $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide vahel. Struktuurisemiootika aspektist on graafide taastatavuse probleem lahendatav tipuorbiitide ja nendele vastavate $(G \setminus v_i)$ -alamgraafide isomorfismiklasside põhjal. Me näitame ka, et peale *tipu-rekonstruktsiooni* esineb nii *serva-* kui ka „*mitteserva*” rekonstruktsioonid. On võimalik moodustada ka „rekonstruktsioonide konstruktiivne süsteem”.

Me lähtume sellest, et graaf G on esitatud kanooniliselt *märgimaatriksi* W kujul, st G on esitatud orbiitide täpsusega ning kujutab endast isomorfsete graafide (ja ainult nende) täielikku invarianti. See tähendab, et kõik isomorfsed graafid $\{G_1 \cong \dots \cong G_m \cong \dots \cong G_M\}_k$ moodustavad *isomorfismiklassi* Γ_k mis on esitatud *ekvivalentsete märgimaatriksite* $W_1 \approx \dots \approx W_m \approx \dots \approx W_M$ näol.

Rekonstruktsiooniprobleemi klassikaline käsitlus, st *Ulami hüpotees* on sõnastatud järgmiselt: „Olgu graafil G p tippu v_i ja graafil H p tippu u_i , kus $p \geq 3$. Kui iga i puhul on alamgraafid $G_i = G \setminus v_i$ and $H_i = H \setminus u_i$ isomorfsed, siis on graafid G ja H isomorfsed”. Ilmselt oli Ulam huvitatud küsimusest: kas graafi G alamgraafide $G \setminus v_i$ hulk sisaldab piisavat teavet graafi G enda kohta? Siin on sobiv korrata, et märgimaatriks W sisaldab seda teavet

Struktuurisemiootiline käsitlus:

- A. Isomorfsed graafid G ja H kujutavad endast vaid *ühete ja samasse isomorfismiklassi* Γ (ehk *-kliki*) kuuluvat *graafipaari* $G \& H \subset \Gamma$, mis omavad *üht ja sama struktuuri* GS ning *orbiite* ja on esitatud *ekvivalentsete märgimaatriksite* $W_G \approx W_H$ kujul.
- B. Kõik isomorfsed alamgraafid $G \setminus v_i$ ja $H \setminus u_i$ jaotuvad graafide G ja H *ühisteks alamstruktuurideks* ehk *isomorfismiklassedeks* $(GS \setminus v_i)_{1, \dots, (GS \setminus v_i)_k, \dots, (GS \setminus v_i)_K}$.

Vanameistri W. T. Tutte [37] järgi peaks rekonstruktsiooniprobleemi lahenduse otsingud algama just *isomorfismiklassidest*, mis struktuurisemiootilises käsitluses ka *isomorfismiklikke* tähendavad.

4.4. Rekonstruktsioon: graafi dekonstrueerimise vastand operatsioon

Graaf struktuuri GS *rekonstruktsiooniks* peame siin struktuuri taastatavust selle naaberstruktuuride GS^{adj} baasil.

Propositsioon 4.5. Kui struktuur GS on *dekonstrueeritud* (Prop. 4.4) oma naaberalamstruktuurideks $GS^{sub}_{1, \dots, GS^{sub}_{m, \dots, GS^{sub}_{N}}$, st suurimateks alamstruktuurideks $(GS \setminus e_{ij})_n$, siis nende *ühend* $\cup (GS \setminus e_{ij})_n, n^+ \in [1, N^+]$, *rekonstrueerib* ehk *taastab* struktuuri GS .

Kommentaariid: a) Olgu graaf G kujutatav seosmaatriksi E näol. Dekomponeerimine naaberalamstruktuurideks tähendab binaar(+)orbiidi ΩR_n raames ühe seose rangelt disjunktiivset eemaldamist, $(E \setminus e_{ij})_1 \vee \dots \vee (E \setminus e_{ij})_n \vee \dots \vee (E \setminus e_{ij})_N$. See tähendab, et igas seosmaatriksis E_n on üks seos puudu. Järelikult, nende ühend $(E \setminus e_{ij})_1 \cup \dots \cup (E \setminus e_{ij})_n \cup \dots \cup (E \setminus e_{ij})_N = E$, $E \equiv G$. b) Põhimõtteliselt kehtib (1) ka siis, kui graaf on esitatud naabertippude nimekirja L alusel, $(L \setminus e_{ij})_1 \cup \dots \cup (L \setminus e_{ij})_n \cup \dots \cup (L \setminus e_{ij})_N = L$, $L \equiv G$. c) Kui isomorfismiklassi Γ kuuluv graaf G_A on *rekomponeeritav* ehk *rekonstrueeritav* ehk *taastatav* oma naaberstruktuuride GS^{adj}_n baasil, siis on seda ka kõik ülejäänud samasse isomorfismiklassi Γ kuuluvad graafid G_B, G_C, G_D, \dots . d) Seega, Ulami hüpotees on õige, kuid selle püstitus on *destruktiivne* ning kanooniliselt, st märgimaatriksite kujul esitatud graafide baasil on selle hüpoteesi sõna-sõnaline mahamängimine *mõttetu tegevus*.

Propositsioon 4.6. Kui struktuur GS on *dekonstrueeritud* oma naaber-ülemstruktuurideks $GS^{sup}_{1, \dots, GS^{sup}_{m, \dots, GS^{sup}_{N}}$, st väikseimaiks ülemstruktuurideks $(GS \cup e_{ij})_n$, siis nende *ühisosa* $\cap (GS \cup e_{ij})_n, n^- \in [1, N^-]$, *rekonstrueerib* ehk *taastab* struktuuri GS .

Kommentaariid: *Ühisosa* kehtib siin ka vastavate seosmaatriksite plaanis, $\cap (E \cup e_{ij})_n = E$, $E \equiv G$ jne.

Kui struktuur GS on oma binaarorbiitide $\Omega R_n, n \in [1, N]$, baasil *dekonstrueeritav* oma naaberstruktuurideks, $F_n: GS \rightarrow GS^{adj}_n$, siis on see *taastatav* nii *naaber-alamstruktuuride ühendi* $\cup GS^{sub}_n, n^+ \in [1, N^+]$, kui ka *naaber-ülemstruktuuride ühisosa* $\cap (GS \cup e_{ij})_n, n^- \in [1, N^-]$, näol.

Kommentaariid: a) Servadest sümmeetriline graafil G on vaid üks naaberalamstruktuur $GS^{sub}_{n=1=N}$. Kui see graaf on ka veel bisümmeetriline, siis on sellel ka vaid üks naaberülemstruktuuri $GS^{sup}_{n=1=N}$.
b) Ulami hüpoteesi sõnastuse järgi oleksime pidanud rääkima siin kahest isomorfsest, p serva omavast graafist G_A ja G_B ning nende p isomorfsest alamgraafi paarist $G_A^{sub}_p \cong G_B^{sub}_p, p \in [1, P]$.

Seega, demonstreerisime Ulami hüpoteesi kehtivust ignoreerides selle sõnastust, kuid mitte mõtet. Selleks: 1) Uurisime suhteid isomorfsete graafide ja nende $(G \setminus v_i)$ -ja $(G \setminus e_{ij})$ -alamgraafide vahel; 2) „Paarisisomorfismide“ $G \cong H$ asemel opereerisime graafide isomorfismiklassidega.

On võimalik formuleerida ka testsugune võimalus.

Propositsioon 4.7. Morfism F on pöörduv – igal GS naaberstruktuuril GS^{adj} on teatud „vastandorbiiit“ ΩR , millele rakendatud vastand-morfism F' taastab lähtestruktuuri GS , $F': GS^{adj} \rightarrow GS$.

Kommentaariid: a) Morfismi pöörduvus kehtib nii alam- GS^{sub}_{n+} kui ka ülemstruktuuride GS^{sup}_{n-} korral. b) Struktuur GS on taastatav ka iga oma naaberstruktuuri GS^{adj} puhul eraldi. Struktuuri GS kõikide naabrite hulgal $\{GS^{adj}_n\}$ esineb teatud vastandmorfismide hulk $\{F'_n\}, n \in [1, N]$, niisugune et iga disjunktiivne element $(F'_1: GS^{adj}_1 \rightarrow GS) \vee \dots \vee (F'_N: GS^{adj}_N \rightarrow GS)$ taastab struktuuri GS separaatselt.

Iga struktuuri GS iga orbiidi ΩR_n puhul esinev morfism F määrab ka vastavale naaberstruktuurile GS^{adj} , $F: GS \rightarrow GS^{adj}$ ülemineku ehk morfismi tõenäosuse $PF = \text{card}|\Omega R_n| : \text{card}|R|$, kui orbiidi võimsuse ja vastavate tipupaaride arvu suhe.

Kommentaariid: Kõik struktuurid GS on ühtlasi ka teatud struktuuri naaber-struktuurid GS^{adj} .

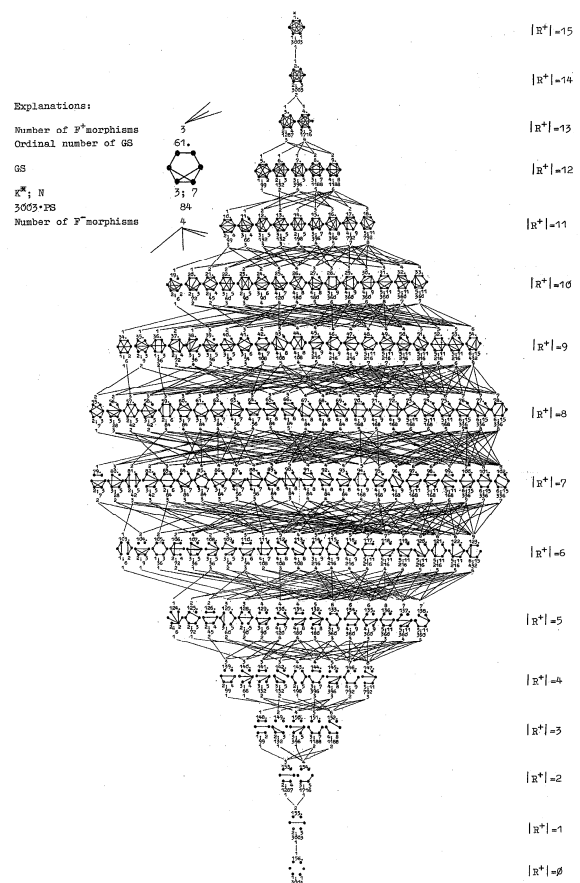
Definitsioon 4.3. Süsteem, mis on moodustatud kõikidest $|V|$ -elemendilistest struktuuridest (st $|V|$ -tipulistest graaf-struktuuridest) $\{GS\}^{|V|}$ ja nendevahelistest morfismidest $\{F\}$ kusjuures:

- i hulk $\{GS\}^{|V|}$ on jaotatud ja järjestatud servade arvu $|E|$ järgi struktuuritasemeteks GSL ,
- ii kus struktuurid GS on järjestatud struktuursete mõõtude järgi, nimetame konstruktiivseks rekonstruktsioonide süsteemiks, tähisatud $CSR^{|V|}$ kus $|V|$ on süsteemi aste.

Näide 4.9. Konstruktiivne rekonstruktsioonide süsteemi [38] võre, tähisatud $CSR^{|V|}$ kus $|V|$ on süsteemi aste ehk tippude arv graafides.

NB! Vt seda näidet ingliskeelses põhitekstis.

On selge, et erinevad struktuurid (mitte-isomorfseid graafid) võivad omada ühiseid naaberstruktuure. Teisest küljest, süva märgimatriksis W^* (Prop. 3.1) on kõik erinevused naaberstruktuuride GS^{adj}_n vahel kujutatud orbiitide ΩR_n näol. Seega, Ulami



hüpotees on sõnastatav ka järgmisel viisil.

Ulami hüpoteesi struktuurne tõlgendus. Kas mitte-isomorfsed graafid G_A ja G_B võivad olla esitatud ekvivalentsete süvamärgi maatriksite $S_A^* \approx S_B^*$ näol, st omada ühesugust struktuuri $GS_A = GS_B$?

JÄRELSÕNA

Oleme lähtunud seisukohast, et graaf on *struktuuri* kui niisuguse *eksplikaat* ehk selgitaja. See väide kuulub süsteemiteoreetikule. Tõepoolest, ükskõik kuidas struktuuri määratlusi lahata jõuab ikka selleni, et struktuur on elementide ja nendevaheliste seoste püsiv kooslus, ja mitte midagi muud – just seesama mis graaf].

Kuidas siis graaf struktuuri selgitab? Esiteks, graaf kujutab struktuuri. See ei tähenda muud kui struktuurielementide nummerdamist ja selle esitamist seosmaatriksi või mõnel muul kujul. Teiseks, isomorfsete graafide klass kujutab üht ja sama struktuuri. Kolmandaks, graafi orbiidid kujutavad struktuurielementide ühesuguseid positsioone. Neljandaks, graafi isomorfismi täpsusega esitatud kanooniline kujutus esitab struktuuri täielikult.

Kui me räägime struktuurist, siis jõuame graafi juurde. Kui me räägime graafist, siis jõuame struktuuri juurde. Graafil ja struktuuril on samad omadused, kuid struktuuri aspekt avab ka graafi „varjatud“ omadusi nagu semiootilised invariandid, isomorfismiklassid, orbiit- ja naaberstruktuurid, bi-, mono-, polü- ja ositi sümmeetria, klikk- ja ring regulaarsus, n - m -klikid jt.

Täna tähelepanu eest,
Tallinn, juuni 2010.